

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАДИКАЛЫ, III. СОВМЕСТНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС

Ю. В. ТУРОВСКИЙ И В. С. ШУЛЬМАН

*Памяти наших отцов — Владимира Васильевича Туровского и Семёна Моисеевича Шульмана, офицеров Советской армии, участников Великой Отечественной войны*

Аннотация. Показано, что совместный спектральный радиус  $\rho(M)$  предкомпактного множества  $M$  операторов в банаховом пространстве равен большему из двух чисел: совместного спектрального радиуса  $\rho_e(M)$  образа  $M$  в алгебре Калкина и BW-радиуса  $r(M)$ . Получены также результаты этого рода, относящиеся к общим нормированным алгебрам. Доказательства основаны на теории топологических радикалов нормированных алгебр.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1960 году Рота и Стрэнг [12] ввели понятие *совместного спектрального радиуса*  $\rho$  (сокращенно, ССР), полагая для ограниченного множества  $M$  элементов нормированной алгебры  $A$ ,

$$\rho(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\|^{1/n} = \inf_n \|M^n\|^{1/n}, \quad (1.1)$$

где норма множества понимается как супремум норм элементов, а произведение множеств — как множество произведений:  $M_1 M_2 = \{ab : a \in M_1, b \in M_2\}$ . Отображение  $M \mapsto \rho(M)$  обладает многими удобными аналитическими и алгебраическими свойствами; в частности, при аналитической зависимости  $\lambda \mapsto M = M(\lambda)$  отображение  $\lambda \mapsto \rho(M(\lambda))$  субгармонично [16, теорема 3.5] (для конечных множеств это было доказано в [13, теорема 3.8]).

Понятие ССР нашло применение в различных областях математики: эволюционной динамике, теории вэйвлетов, разностных уравнениях и во многих других (см. например [6]), а также в теории операторов, в частности, в теории инвариантных подпространств [15, 21, 16]. Это стимулировало интерес к нахождению формул для вычисления ССР. Важная формула для вычисления ССР ограниченного множества матриц была найдена в 1992 году Бергером и Вонгом [2]. Чтобы её привести, введём, следуя [2], иную спектральную характеристику ограниченного подмножества  $M$  алгебры — *BW-радиус*:

$$r(M) := \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(M), \text{ где } r_n(M) = \sup \{\rho(a) : a \in M^n\}^{1/n}. \quad (1.2)$$

Ясно, что  $r(M) \leq \rho(M)$ . В [2] было доказано, что

$$\rho(M) = r(M) \quad (1.3)$$

для любого ограниченного множества матриц.

Формула Бергера-Вонга (1.3) была перенесена в [16] на предкомпактные подмножества компактных операторов в банаховом пространстве и использовалась при изучении операторных полугрупп и алгебр Ли. Чтобы убедиться в её

2010 *AMS Classif.* Primary 47D03; Secondary 46H05.

*Ключевые слова и фразы:* совместный спектральный радиус, формула Бергера-Вонга, топологический радикал, инвариантное подпространство.

полезности, достаточно увидеть, как легко из нее следует (полученное в [21]) решение проблемы вольтерровой полугруппы "всякая ли полугруппа вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство?". В самом деле, если  $G$  — полугруппа вольтерровых (то есть, компактных квазинильпотентных) операторов, то  $r(M) = 0$  для любого конечного множества  $M \subset G$ . Из (1.3) следует, что  $\rho(M) = 0$  и тогда линейная оболочка множества  $M$  состоит из вольтерровых операторов (см. например [13, предложение 3.5]). Значит, линейная оболочка полугруппы  $G$  — алгебра вольтерровых операторов, и, по теореме Ломоносова [8], она имеет инвариантное подпространство.

Подчеркнём, что оба ограничения компактности в (1.3) существенны. В [3] приведен пример пары операторов  $a, b$ , для которых  $r(\{a, b\}) = 0 \neq \rho(\{a, b\})$ . Известны и примеры ограниченных множеств компактных операторов, для которых равенство (1.3) не выполнено (см. например [11, предложение 2.16]).

Мы получим вариант формулы Бергера-Вонга, свободный от ограничения компактности операторов. А именно, будет показано, что для любого предкомпактного множества  $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$  справедливо равенство

$$\rho(M) = \max\{r(M), \rho_e(M)\}, \quad (1.4)$$

где  $\rho_e(M) := \rho(\pi(M))$  — ССР образа  $M$  в алгебре Калкина  $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$  при каноническом эндоморфизме  $\pi$  (здесь, разумеется,  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  и  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$  — алгебра всех ограниченных операторов и идеал всех компактных операторов в банаховом пространстве  $\mathcal{X}$ ). Мы назвали (1.4) *обобщённой формулой Бергера-Вонга* (обобщенной БВ-формулой) в [17], где она была доказана для операторов в произвольном рефлексивном банаховом пространстве, но вскоре выяснилось, что есть несколько видов формул, обобщающих (1.3), и нужно уточнять значение термина. Отметим, что из (1.4) следует справедливость (1.3) для предкомпактных семейств операторов вида  $\lambda 1 + K$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а  $K$  — компактный оператор, что было основой данного в [16] доказательства того, что всякая алгебра Ли вольтерровых операторов имеет инвариантное подпространство.

В этой работе большую роль играет теория топологических радикалов нормированных алгебр, основы которой были заложены в работе Диксона [5] и которая получила дальнейшее развитие в [18, 20]. Удобство одновременного использования алгебраического и операторного подходов объясняется тем, что первый позволяет вести редукцию по идеалам и фактор-алгебрам (где работают радикалы), а второй — по инвариантным подпространствам и фактор-пространствам. Результаты работы также отражают чередование этих подходов. Мы сначала получаем "смешанную БВ-формулу" выражающую ССР семейства элементов нормированной алгебры через спектральные характеристики ассоциированного семейства операторов двустороннего умножения. Из неё мы выводим (1.4), которую теперь называем *операторной БВ-формулой*.

В свою очередь, (1.4) используется для получения варианта формулы вычисления ССР, пригодного для произвольных нормированных алгебр. Это — *алгебраическая БВ-формула с гипокompактным радикалом*:

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)), r(M)\}. \quad (1.5)$$

Заметим, что  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \supset \mathcal{K}(\mathcal{X})$  при  $A = \mathcal{B}(\mathcal{X})$  и включение может быть строгим — например, при  $\mathcal{X} = l^1$  и в ряде других примеров все слабо компактные операторы входят в  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$  (см. раздел 4.3). Таким образом, (1.5) не только обобщает операторную БВ-формулу (1.4), но и усиливает её.

Формулы (1.4) и (1.5) были анонсированы в [14], но публикация доказательства долгое время откладывалась по ряду причин. Лишь в 2008 году авторы поместили доказательство упомянутых формул в электронный архив [19], а несколько месяцев спустя Моррис, также в электронном препринте [9], нашёл

другое доказательство формулы (1.4), основанное на мультипликативной эргодической теории.

Далее мы рассматриваем перспективы получения "оптимальной" формулы для вычисления ССР. Оказалось, что это можно сделать в рамках теории радикалов. Мы покажем, что существует наибольший из радикалов, которыми можно заменить  $\mathcal{R}_{\text{hc}}$  в (1.5); мы обозначаем его  $\mathcal{R}_{\text{bw}}$ . Мы строим также новый радикал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ , мажорируемый  $\mathcal{R}_{\text{bw}}$ . Как следствие, сочетание радикала  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$  с гипокompактным радикалом позволяет получить более сильную алгебраическую БВ-формулу, чем (1.5). В конце работы мы указываем приложение полученных формул к вопросу о непрерывности ССР.

## 2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Алгебры, рассматриваемые в работе, предполагаются комплексными, ассоциативными и нормированными. Обозначим через  $A^1$  алгебру, получаемую из алгебры  $A$  присоединением единицы; при этом полагаем  $A^1 = A$ , если  $A$  унитарна. Термин *идеал* означает двусторонний идеал, *оператор* — ограниченный линейный оператор в комплексном нормированном пространстве, *фактор* алгебры — фактор-алгебра алгебры по её замкнутому идеалу. Если  $J$  — замкнутый идеал в  $A$ , то  $q_J$  — это стандартный эпиморфизм  $A$  на  $A/J$ ; вместо  $q_J(a)$  удобнее иногда писать  $a/J$ . Точно так же, образ множества  $M \subset A$  относительно  $q_J$  обозначается либо  $q_J(M)$ , либо, более коротко,  $M/J$ .

Замкнутая линейная оболочка множества  $M$  в нормированном пространстве  $\mathcal{Y}$  обозначается через  $\text{span } M$  или, если требуется уточнение, через  $\text{span}_{\mathcal{Y}} M$ , замыкание — через  $\overline{M}$  или  $\overline{M}^{\mathcal{Y}}$ , замкнутый единичный шар в  $\mathcal{Y}$  — через  $\mathcal{Y}_{\odot}$ .

Говоря об основных конструкциях работы, отметим иные характеристики BW-радиуса  $r(M)$  ограниченного подмножества  $M$  алгебры  $A$ . Поскольку верно  $\rho(a^n) = \rho(a)^n$ , ясно, что  $r_n(M) = r_1(M^n)^{1/n} \leq r_{nm}(M)$  для любых  $n, m \in \mathbb{N}$ , где  $r_n(M)$  определено в (1.2), откуда

$$r(M) = \sup_n r_n(M) = \sup_n r_{nm}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{\mathbf{n}(k)}(M) \quad (2.1)$$

для некоторой фиксированной последовательности  $\mathbf{n}(k)$ : например, можно взять  $\mathbf{n}(k) = (p_1 \cdots p_k)^k$ , где  $p_i$  пробегает ряд всех простых чисел.

Переход от алгебраической ситуации к операторной удобно осуществлять через рассмотрение операторов умножения. Как обычно, символами  $L_a$  и  $R_a$  мы обозначаем операторы левого и правого умножения на элемент  $a$  в алгебре  $A$ :  $L_a x = ax$ ,  $R_a x = xa$ . Далее, для  $M \subset A$  полагаем  $L_M = \{L_a : a \in M\}$  и  $R_M = \{R_a : a \in M\}$ . Нетрудно проверить, что если  $M$  ограничено, то  $r(L_M) = r(R_M) = r(M)$  и  $\rho(L_M) = \rho(R_M) = \rho(M)$ . Важно, что  $r(M)$  и  $\rho(M)$  находят отражение в свойствах семейства операторов  $L_M R_M = \{L_a R_b : a, b \in M\}$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $M$  — ограниченное подмножество нормированной алгебры  $A$ . Тогда  $\rho(M^m) = \rho(M)^m$  и  $r(M^m) = r(M)^m$  для любого  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\rho(M)^2 = \rho(L_M R_M)$  и  $r(M)^2 = r(L_M R_M)$ .

*Доказательство.* Учитывая (1.1), (2.1) и то, что  $(M^m)^n = M^{mn}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , получим

$$\begin{aligned} \rho(M^m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^{mn}\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|M^{mn}\|^{1/mn} \right)^m = \rho(M)^m, \\ r(M^m) &= \sup_n r_n(M^m) = \sup_n r_1(M^{mn})^{1/n} = \sup_n r_{nm}(M)^m = r(M)^m. \end{aligned}$$

Так как  $\|(L_M R_N)^n\| \leq \|M^n\| \|N^n\|$ , то  $\rho(L_M R_M) \leq \rho(M)^2$ . Чтобы доказать обратное неравенство, заметим, что  $\|M^3\| \leq \|L_M R_M\| \|M\|$ . Меняя здесь  $M$  на

$M^n$ , извлекая корни и переходя к пределу в обеих частях неравенства, получим  $\rho(M)^3 = \rho(M^3) \leq \rho(L_M R_M) \rho(M)$ .

Так как  $L_M$  коммутирует с  $R_M$ , то  $\rho(L_a R_b) \leq \rho(L_a) \rho(R_b) \leq \rho(a) \rho(b)$  для любых  $a, b \in M^n$ . Учитывая (1.2), беря точные верхние грани, извлекая корни и переходя к верхнему пределу, получим  $r(L_M R_M) \leq r(M)^2$ .

Так как  $\rho(a)^2 = \rho(L_a R_a)$ , то  $\sup_{a \in M^n} \rho(a)^2 \leq \sup_{b, c \in M^n} \rho(L_b R_c)$ . Снова извлекая корни и переходя к верхнему пределу, получим  $r(M)^2 \leq r(L_M R_M)$ .  $\square$

Запишем определение существенного ССР  $\rho_e$  в более подробной форме:

$$\rho_e(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{\|T\|_e : T \in M^n\})^{1/n} = \inf_n (\sup \{\|T\|_e : T \in M^n\})^{1/n},$$

где  $\|T\|_e = \|\pi(T)\|$  — существенная норма  $T$ . Характеристикой оператора, близкой к  $\|T\|_e$ , является хаусдорфова мера некомпактности (*хаусдорфова норма*)  $\|T\|_\chi$  образа единичного шара  $\mathcal{X}_\odot$  при отображении  $T$  (напомним, что это — точная нижняя грань множества тех  $\varepsilon > 0$ , для которых  $T\mathcal{X}_\odot$  имеет конечную  $\varepsilon$ -сеть, и что  $\|T\|_\chi \leq \|T\|_e$ ). Преимущество полунормы  $\|T\|_\chi$  объясняется тем, что она хорошо согласована с сужением оператора на инвариантное подпространство и с его индуцированным действием в фактор-пространстве (см. например [17, лемма 2.5]):

$$\|T|_{\mathcal{Y}}\|_\chi \leq 2\|T\|_\chi \text{ и } \|T|(\mathcal{X}/\mathcal{Y})\|_\chi \leq \|T\|_\chi. \quad (2.2)$$

Важный технический результат был получен в [16, следствие 6.5]:

**Лемма 2.2.**  $\|L_M R_M\|_\chi \leq 16\|M\|_\chi \|M\|$  для любого предкомпактного множества  $M$  операторов.

Для соответствующего хаусдорфова ССР  $\rho_\chi$ , определенного равенством

$$\rho_\chi(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup \{\|T\|_\chi : T \in M^n\} \right)^{1/n} = \inf_n \left( \sup \{\|T\|_\chi : T \in M^n\} \right)^{1/n},$$

доказано [9], что он совпадает с  $\rho_e$  на предкомпактных множествах операторов. Однако мы будем использовать далее лишь очевидное неравенство

$$\rho_\chi(M) \leq \rho_e(M) \quad (2.3)$$

для любого предкомпактного множества операторов  $M$ . Из него следует, что для доказательства (1.4) достаточно установить равенство

$$\rho(M) = \max \{r(M), \rho_\chi(M)\}. \quad (2.4)$$

Важный случай выполнения этого равенства доказан в [16, предложение 9.6]:

**Лемма 2.3.** Если  $\rho(M) = 1$  для предкомпактного множества  $M$  операторов и полугруппа, порождённая  $M$ , ограничена, то (2.4) выполнено для  $M$ .

Для любого ограниченного множества  $M$  элементов нормированной алгебры  $A$  положим  $\rho^\chi(M) = \rho_\chi(L_M R_M)^{1/2}$ . Легко видеть, учитывая (2.2), что для любого замкнутого идеала  $J$  алгебры

$$\rho^\chi(M/J) \leq \rho^\chi(M). \quad (2.5)$$

Элемент  $a \in A$  называется *компактным*, если оператор  $W_a := L_a R_a$  компактен в  $A$ . Будем говорить, что множество  $M \subset A$  *состоит из совместно компактных элементов* в  $A$ , если все операторы из  $L_M R_M$  компактны в  $A$ . Нам понадобится следующее обобщение основного результата работы [21].

**Лемма 2.4.** Если  $G$  — полугруппа квазинильпотентных элементов нормированной алгебры  $A$  и  $G$  состоит из совместно компактных элементов в  $A$ , то  $\text{span } G$  состоит из квазинильпотентных элементов.

*Доказательство.* Ясно, что  $L_G R_G$  — полугруппа вольтерровых операторов в  $A$ . В силу [21, теорема 4],  $\text{span } L_G R_G$  также состоит из вольтерровых операторов. Так как  $L_b R_c \in \text{span } L_G R_G$  для любых  $b, c \in \text{span } G$ , то  $L_{\text{span } G} R_{\text{span } G}$  также состоит из квазинильпотентных операторов, и, значит,  $\text{span } G$  состоит из квазинильпотентных элементов.  $\square$

### 3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РАДИКАЛЫ

*Топологический радикал* (ТР) на классе всех нормированных алгебр — это отображение  $P$ , сопоставляющее каждой алгебре  $A$  её замкнутый идеал  $P(A)$  и удовлетворяющее условиям:

- (R1)  $f(P(A)) \subset P(B)$  для любого непрерывного открытого эпиморфизма  $f: A \rightarrow B$ .
- (R2)  $P(A/P(A)) = 0$ .
- (R3)  $P(P(A)) = P(A)$ .
- (R4) Для любого идеала  $J$  алгебры  $A$ ,  $P(J)$  — идеал алгебры  $A$ , содержащийся в  $P(A)$ .

По сравнению с определением ТР в [5], мы требуем открытости эпиморфизма в (R1) и не требуем замкнутости идеала в (R4). Алгебра называется  *$P$ -радикальной*, если  $A = P(A)$ . Можно показать (см. [18, следствие 2.8 и теорема 2.9(i)]), что замыкания  $P$ -радикальных идеалов и факторы  $P$ -радикальных алгебр  $P$ -радикальны, и что класс всех  $P$ -радикальных алгебр устойчив относительно расширений (если  $J$  замкнут,  $A/J$  и  $J$   $P$ -радикальны, то  $A$   $P$ -радикальна). Более общий результат сформулирован в лемме 3.1.

Назовём занумерованное ординалами семейство  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  идеалов алгебры  $A$ , содержащихся и замкнутых в некотором идеале  $J$  алгебры  $A$ , *возрастающей трансфинитной цепочкой* идеалов, если  $J_\alpha \subset J_\beta$  при  $\alpha < \beta$  и  $J_\beta = \overline{\bigcup_{\alpha < \beta} J_\alpha}^J$  для любого предельного ординала  $\beta \leq \gamma$ , и *убывающей трансфинитной цепочкой*, если  $J_\beta \subset J_\alpha$  при  $\alpha < \beta$  и  $J_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} J_\alpha$  для любого предельного ординала  $\beta \leq \gamma$ . Следующий результат выводится из [18, теоремы 2.9(i) и 2.10(i)].

**Лемма 3.1.** Пусть  $P$  — топологический радикал. Если в возрастающей трансфинитной цепочке  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  замкнутых идеалов нормированной алгебры  $A$  первый идеал  $J_0$  и все факторы  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$   $P$ -радикальны, то и её последний элемент  $J_\gamma$   $P$ -радикален.

Мы, в основном, будем иметь дело со специальными классами радикалов, обладающих особенно удобными свойствами. Топологический радикал  $P$  называется *наследственным* (сокращенно, НТР), если выполняется условие

- (R5)  $P(J) = J \cap P(A)$  для любого идеала  $J$  алгебры  $A$ .

и *равномерным* (см. [18]), если все подалгебры произвольной  $P$ -радикальной алгебры  $P$ -радикальны. Легко видеть, что равномерные радикалы наследственны, и что (R5) влечет (R3) и (R4). Поэтому НТР можно определять условиями (R1), (R2) и (R5), чем мы будем пользоваться в дальнейшем.

Имеет смысл также рассматривать ТР в классе всех банаховых алгебр, сужая действие вышеперечисленных аксиом. Так, при этом, в (R4) под идеалом понимается замкнутый идеал, а требование открытости эпиморфизма в (R1) излишне (то есть, выполняется автоматически в силу теоремы Банаха).

Если  $P$  — НТР в классе банаховых алгебр (с, возможно, более широкой областью определения), то, согласно [18, теорема 2.21], отображение  $P^r$ , определённое равенством  $P^r(A) := A \cap P(\hat{A})$ , где  $\hat{A}$  — пополнение нормированной алгебры, — НТР в классе нормированных алгебр. Поскольку  $P^r(A) = P(A)$  для банаховых алгебр, *регулярная процедура*  $P \mapsto P^r$  расширяет действие

$P$  с банаховых алгебр на нормированные алгебры, причём  $P^{rr} = P^r$ . ТР  $P$  в классе нормированных алгебр называется *регулярным* (см. [18]), если  $P = P^r$ .

Потребность в регуляризации иллюстрируется следующим примером: радикал Джекобсона — НТР в классе банаховых алгебр (обозначаем его через  $\text{Rad}$ ), но не является ТР в классе нормированных алгебр [5, пример 10.1]. Поэтому вместо  $\text{Rad}$  мы рассматриваем *регулярный радикал Джекобсона*  $\text{Rad}^r$ . Ясно, что он равномерен. Другие примеры ТР мы рассмотрим ниже.

В классе всех (топологических) радикалов введем частичный порядок, полагая  $P_1 \leq P_2$ , если  $P_1(A) \subset P_2(A)$  для любой нормированной алгебры.

**Лемма 3.2.** а) Любое семейство радикалов  $\{P_i : i \in \Lambda\}$  имеет точную верхнюю грань  $\bigvee_i P_i$  и точную нижнюю грань  $\bigwedge_i P_i$  в классе всех ТР.

б) Пусть  $P = \bigvee\{P_i : i \in \Lambda\}$ . В любой алгебре  $A$  существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ , такая что  $J_0 = 0$ ,  $J_\gamma = P(A)$  и каждый фактор  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  является  $P_i$ -радикальным для некоторого  $i$ .

в) Если все  $P_i$  наследственны, то радикал  $\bigwedge\{P_i : i \in \Lambda\}$  является наследственным и сопоставляет каждой алгебре  $A$  идеал  $\bigcap_i P_i(A)$ .

*Доказательство.* а) Положим  $H(A) = \overline{\sum_i P_i(A)}$  и  $B(A) = \bigcap_i P_i(A)$  (это корректно, так как можно считать  $\Lambda$ , если необходимо, множеством классов эквивалентности совпадающих на алгебре радикалов). Отображения  $B$  и  $H$  являются *верхним* и *нижним ТР* (см. [5]), то есть удовлетворяют всем аксиомам ТР, кроме, быть может, (R3) и (R2) соответственно.

Действительно, ясно, что условия (R1) и (R4) выполнены для  $B$  и  $H$ . Так как  $P_i(A)$  — идеал в  $H(A)$ , то

$$P_i(A) = P_i(P_i(A)) \subset P_i(H(A)) \subset H(H(A)),$$

откуда  $H(A) \subset H(H(A))$ , то есть, (R3) выполнено для  $H$ . Покажем теперь, что условие (R2) выполнено для  $B$ . Пусть  $I = B(A)$  и  $J = q_I^{-1}(B(A/I))$ . Так как  $I \subset P_i(A)$  для любого  $i$ , то задан эпиморфизм  $p_i : A/I \rightarrow A/P_i(A)$ , который является непрерывным и открытым. Тогда

$$(p_i \circ q_I)(J) = p_i(B(A/I)) \subset p_i(P_i(A/I)) \subset P_i(A/P_i(A)) = 0.$$

Следовательно,  $J \subset P_i(A)$  для любого  $i$ , откуда  $J \subset I$  и  $B(A/I) = 0$ .

Свяжем с  $H$  и  $B$  трансфинитные цепочки замкнутых идеалов алгебры  $A$ , возрастающую  $(H^{(\alpha)}(A))$  и убывающую  $(B^{(\alpha)}(A))$ , определенные рекуррентно:  $H^{(\alpha+1)}(A)$  — прообраз  $H(A/H^{(\alpha)}(A))$  в  $A$  и  $B^{(\alpha+1)}(A) = B(B^{(\alpha)}(A))$  при начальных условиях  $H^{(0)} = 0$  и  $B^{(0)} = A$ . Отображения  $B^{(\alpha)}$  и  $H^{(\alpha)}$  — соответственно верхний и нижний ТР. По существу, это установлено в [5, теоремы 6.6 и 6.10]: аргументы [5] непосредственно переносятся с банаховых алгебр на нормированные, и только один момент требует пояснений — это условие (R4) в случае незамкнутого идеала  $J$ . Для  $B^{(\alpha)}$  оно легко доказывается индукцией; проверим его для  $H^{(\alpha)}$ . Если по предположению индукции  $I = H^{(\alpha)}(J)$  — идеал в  $A$ , содержащийся в  $K = H^{(\alpha)}(\overline{J})$ , то отображение  $x/I \mapsto q_{\overline{J}}(x)$  осуществляет изоморфизм между  $J/I$  и идеалом  $q_{\overline{J}}(J)$  алгебры  $A/\overline{J}$ . Тогда

$$H^{(\alpha+1)}(J) = \{x \in J : q_{\overline{J}}(x) \in H(q_{\overline{J}}(J))\} \quad (3.1)$$

— идеал в  $A$ . Так как  $q_{\overline{J}}(J)$  — идеал в  $\overline{J}/\overline{J}$ , то  $H(q_{\overline{J}}(J)) \subset H(\overline{J}/\overline{J})$ . Так как  $p(H(\overline{J}/\overline{J})) \subset H(\overline{J}/K)$  для стандартного эпиморфизма  $p : \overline{J}/\overline{J} \rightarrow \overline{J}/K$ , то  $H(\overline{J}/\overline{J}) \subset q_{\overline{J}}(H^{(\alpha+1)}(\overline{J}))$  и тогда  $H^{(\alpha+1)}(J) \subset H^{(\alpha+1)}(\overline{J})$  в силу (3.1); шаг же индукции для предельного ординала ясен. Итак, показано, что  $H^{(\alpha)}(J)$  — идеал в  $A$  и  $H^{(\alpha)}(J) \subset H^{(\alpha)}(\overline{J})$  для любого ординала  $\alpha$ . Учитывая включение  $H^{(\alpha)}(\overline{J}) \subset H^{(\alpha)}(A)$ , доказанное в [5], получим, что  $H^{(\alpha)}$  удовлетворяет (R4).

В силу монотонности, цепочки  $(B^\alpha(A))$  и  $(H^{(\alpha)}(A))$  стабилизируются: найдутся такие ординалы  $\beta$  и  $\gamma$ , что  $H^{(\beta+1)}(A) = H^{(\beta)}(A)$  и  $B^{\gamma+1}(A) = B^\gamma(A)$ . Найденные при этом идеалы обозначим через  $H'(A)$  и  $B'(A)$ . Из условий стабилизации легко следует согласно [5, теоремы 6.6 и 6.10] (оговорка, сделанная выше, здесь уже не нужна), что соответствующие отображения  $B'$  и  $H'$  удовлетворяют (R3) и (R2), то есть становятся радикалами. Ясно, что  $H'$  и  $B'$  — верхняя и нижняя грани семейства  $\{P_i : i \in \Lambda\}$ . Если  $T$  — ТР, являющийся верхней гранью  $\{P_i : i \in \Lambda\}$ , то по индукции получим, что  $H^{(\alpha)} \leq T^{(\alpha)} = T$  для любого  $\alpha$ , откуда  $H' \leq T$ . Значит,  $H'$  — точная верхняя грань  $\{P_i : i \in \Lambda\}$ . Аналогично можно показать, что  $B'$  — точная нижняя грань  $\{P_i : i \in \Lambda\}$  (см. также [5, следствие 6.12]).

б) Допустим, рассуждая по индукции, что мы уже построили требуемый идеал  $J_\alpha$ . Поскольку  $J_\alpha \subset P(A)$ , можно проверить, что  $P(A)/J_\alpha = P(A/J_\alpha)$  (см. например [18, доказательство следствия 2.8 (ii)]). Если  $J_\alpha \neq P(A)$ , то  $H(A/J_\alpha) \neq 0$ , что даёт возможность построить  $J_{\alpha+1}$ .

с) Поскольку  $B$  удовлетворяет условиям (R1) и (R2), достаточно доказать (R5) для  $B$ . Но это очевидно в силу того, что (R5) выполнено для всех  $P_i$ .  $\square$

**3.1. Компактно квазинильпотентный радикал.** Радикал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ , который мы сейчас определим, связан с ССР. Пусть  $\mathfrak{K}(A)$  — множество всех предкомпактных подмножеств нормированной алгебры  $A$ . Назовём  $A$  *компактно квазинильпотентной*, если  $\rho(M) = 0$  для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Следующий результат доказан в [18, теоремы 4.18, 4.20 и 4.25, лемма 4.11].

**Теорема 3.3.** (а) В любой нормированной алгебре  $A$  есть наибольший компактно квазинильпотентный идеал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ . Отображение  $A \mapsto \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  — наследственный топологический радикал.

(б) Элемент  $a \in A$  принадлежит  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  тогда и только тогда, когда  $\rho(aM) = 0$  для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Эквивалентное условие:  $\rho(\{a\} \cup M) = \rho(M)$  для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .

(с)  $\rho(M) = \rho(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A))$  для всех  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .

(д)  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(B) = B \cap \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  для любой плотной подалгебры  $B$ .

Условие (д) эквивалентно регулярности  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ . Ясно, что  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$  равномерен.

**3.2. Гипокомпактный радикал.** Обозначим через  $\mathcal{C}(A)$  множество всех компактных элементов нормированной алгебры  $A$ . Это — замкнутый полугрупповой идеал в  $A$ , так что  $\text{span } \mathcal{C}(A)$  — идеал в  $A$ .

**Лемма 3.4.** Если  $f : A \rightarrow B$  — непрерывный открытый эпиморфизм нормированных алгебр, то  $f(\mathcal{C}(A)) \subset \mathcal{C}(B)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathcal{C}(A)$ . Так как  $fW_a = W_{f(a)}f$  и  $f(A_\odot)$  содержит открытый шар пространства  $B$ , то  $W_{f(a)}$  компактен в  $B$ .  $\square$

**Лемма 3.5.** Пусть  $J$  — идеал в  $A$ . Если  $\mathcal{C}(J) \neq 0$ , то  $J \cap \mathcal{C}(A) \neq 0$ .

*Доказательство.* Легко видеть, что

$$W_{ba} = L_b W_a R_b = R_a W_b L_a \quad (3.2)$$

для всех  $a, b \in A$ . Если  $a \in \mathcal{C}(J)$ , то при любом  $b \in J$  оператор  $W_{ba}$  компактен в  $A$ . Поэтому  $J\mathcal{C}(J) \subset J \cap \mathcal{C}(A)$  и всё доказано, если  $J\mathcal{C}(J) \neq 0$ . С другой стороны, если  $J\mathcal{C}(J) = 0$ , то  $\mathcal{C}(J) \subset \mathcal{C}(A)$ , поскольку  $W_a(x) = (ax)a = 0$  для всех  $a \in \mathcal{C}(J)$  и  $x \in A$ .  $\square$

Следующий результат легко следует из (3.2).

**Лемма 3.6.** *Замкнутый идеал, порожденный компактным элементом нормированной алгебры  $A$ , состоит из совместно компактных элементов в  $A$ .*

Нормированная алгебра  $A$  называется *гипокомпактной*, если любой её ненулевой фактор  $A/J$  содержит ненулевой компактный элемент, и *бикокомпактной*, если  $A$  состоит из совместно компактных элементов в  $A$ . Эти понятия распространим на идеалы и подалгебры, рассматривая их как нормированные алгебры. Из определения вытекает, что замыкания гипокомпактных подалгебр и факторы гипокомпактных алгебр гипокомпактны.

**Лемма 3.7.** *Любой, даже односторонний, ненулевой идеал гипокомпактной алгебры содержит ненулевой компактный элемент этой алгебры.*

*Доказательство.* Пусть  $A$  гипокомпактна и  $J$  — её ненулевой левый идеал. Пусть  $I = \{a \in A : aJ = 0\}$ . Тогда  $I$  — замкнутый идеал в  $A$ . Если  $I = A$ , то всякий элемент в  $J$  — компактный элемент в  $A$ . Иначе  $A/I$  имеет ненулевой компактный элемент  $b$ . Выберем  $a \in A$ , такой что  $q_I(a) = b$ . Очевидно, найдется  $x \in J$ , такой что  $ax \neq 0$ . Докажем, что элемент  $ax$  компактен в  $A$ .

Действительно,  $W_{ax} = R_x W_a L_x$ . Так как  $R_x(I) = 0$ , определим оператор  $V : A/I \rightarrow A$ , полагая  $V(q_I(y)) = yx$  для любого  $y \in A$ . Тогда нетрудно видеть, что  $\|V\| \leq \|R_x\|$  и  $R_x = Vq_I$ . Поскольку оператор  $q_I W_a = W_b q_I$  компактен, оператор  $W_{ax} = Vq_I W_a L_x$  компактен в  $A$ .  $\square$

Ясно, что всякая бикокомпактная алгебра гипокомпактна. Мы установим в следующем результате, что все гипокомпактные алгебры могут быть получены последовательным расширением бикокомпактных.

**Предложение 3.8.** *Пусть  $J$  — идеал в нормированной алгебре  $A$ . Следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $J$  гипокомпактен.
- (ii) Для всякого непрерывного открытого эпиморфизма  $f : A \rightarrow B$  либо  $f(J) = 0$ , либо  $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$ .
- (iii) Существует возрастающая трансфинитная цепочка  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  идеалов в  $A$ , такая что  $J_0 = 0$ ,  $J_\gamma = J$ , все  $J_\alpha$  замкнуты в  $J$  и все факторы  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  бикокомпактны.

*Доказательство.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Пусть  $I = \ker f$  и  $K = I \cap \overline{J}$ . Тогда алгебра  $\overline{J}$  и её фактор  $\overline{J}/K$  — гипокомпактные алгебры, в то время как  $q_K(J)$  — одновременно идеал в  $A/K$  и  $\overline{J}/K$ . Предположим, что  $f(J) \neq 0$ . Тогда  $q_K(J) \neq 0$  и  $q_K(J) \cap \mathcal{C}(\overline{J}/K)$  отлично от нуля по лемме 3.7. Так как это множество содержится в  $\mathcal{C}(q_K(J))$ , то найдётся ненулевой элемент  $a \in q_K(J) \cap \mathcal{C}(A/K)$  по лемме 3.5. Определим отображение  $g : A/K \rightarrow B$  условием  $g(q_K(b)) = f(b)$  для любого  $b \in A$ . Ясно, что  $g$  — непрерывный открытый эпиморфизм. Выберем такой элемент  $b \in J$ , что  $a = q_K(b)$ . Тогда  $f(b) = g(a)$  — ненулевой компактный элемент алгебры  $B$  по лемме 3.4.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Рассмотрим все возрастающие трансфинитные цепочки  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \beta}$  идеалов в  $A$ , такие что  $J_\alpha \subset J$  и  $J_\alpha$  замкнут в  $J$ ,  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  бикокомпактен и отличен от нуля для любого  $\alpha < \beta$ . Такие цепочки образуют множество (а не класс), поскольку  $A$  — множество. Упорядочим его условием

$$(J_\alpha)_{\alpha \leq \beta_1} \prec (I_\alpha)_{\alpha \leq \beta_2}, \text{ если } \beta_1 \leq \beta_2 \text{ и } J_\alpha = I_\alpha \text{ при } \alpha \leq \beta_1.$$

По лемме Цорна, в этом множестве есть максимальный элемент  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ . Пусть  $K = \overline{J_\gamma}$ . Если  $J_\gamma \neq J$ , то  $K \neq \overline{J}$ , и фактор  $J/J_\gamma$  изометрически изоморфен  $q_K(J)$ . Полагая  $B = A/K$  и  $f = q_K$ , из (ii) выводим, что  $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$ . По лемме 3.6, существует ненулевой замкнутый бикокомпактный идеал  $I$  в  $B$ , порождённый элементом из  $f(J)$ .



Положим  $J_{\gamma+1} = \{x \in J : f(x) \in I\}$ . Тогда легко видеть, что  $J_{\gamma+1} \neq J_\gamma$ ,  $J_{\gamma+1}$  — идеал в  $A$ ,  $J_{\gamma+1}$  замкнут в  $J$  и  $J_{\gamma+1}/J_\gamma$  бикомпактен. Следовательно, к цепочке можно добавить  $J_{\gamma+1}$ , вопреки предположению максимальности.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Пусть  $I$  — собственный замкнутый идеал в  $J$ . Возьмём первый ординал  $\alpha$ , при котором  $J_\alpha$  не лежит в  $I$ . Тогда  $0 \neq q_I(J_\alpha) \subset \mathcal{C}(J/I)$ .  $\square$

**Следствие 3.9.** Пусть  $A$  — нормированная алгебра. Следующие условия эквивалентны:

- (i)  $A$  гипокомпактна;
- (ii) все идеалы и факторы алгебры  $A$  гипокомпактны;
- (iii)  $J$  и  $A/J$  гипокомпактны для некоторого замкнутого идеала  $J$  в  $A$ .

*Доказательство.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Мы уже знаем, что фактор гипокомпактной алгебры гипокомпактен. Пусть теперь алгебра  $A$  гипокомпактна и  $J$  — её идеал. Пусть  $f : A \rightarrow B$  — непрерывный открытый эпиморфизм и  $I = \ker f$ . Считая, что  $f(J) \neq 0$ , получим, что  $q_I(J) \neq 0$ . По лемме 3.7, найдется такой  $a \in J$ , что  $0 \neq q_I(a) \in \mathcal{C}(A/I)$ . По лемме 3.4,  $f(a)$  — ненулевой компактный элемент алгебры  $B$ . Согласно предложению 3.8,  $J$  гипокомпактен.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) очевидно.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Пусть  $I$  — собственный замкнутый идеал в  $A$ . Если  $J \subset I$ , то  $A/I$  можно отождествить с алгеброй  $(A/J)/(I/J)$ , являющейся фактором гипокомпактной алгебры. По определению, она содержит компактный элемент.

Пусть теперь  $I$  не содержит  $J$ . Полагая  $K = J \cap I$ , имеем  $\mathcal{C}(J/K) \neq 0$ . По лемме 3.5,  $J/K \cap \mathcal{C}(A/K) \neq 0$ . Пусть  $0 \neq q_K(a) \in J/K \cap \mathcal{C}(A/K)$ . Тогда  $a \notin I$  и  $q_I(a) \in \mathcal{C}(A/I)$  по лемме 3.4. Таким образом,  $A/I$  содержит ненулевые компактные элементы.  $\square$

**Следствие 3.10.** В любой нормированной алгебре есть наибольший гипокомпактный идеал.

*Доказательство.* Пусть  $J$  — замкнутая линейная оболочка объединения всех гипокомпактных идеалов алгебры  $A$ . Докажем, что идеал  $J$  гипокомпактен.

Согласно предложению 3.8, достаточно показать, что если  $f : A \rightarrow B$  — непрерывный открытый эпиморфизм, причем  $f(J) \neq 0$ , то  $f(J) \cap \mathcal{C}(B) \neq 0$ . Но если  $f(J) \cap \mathcal{C}(B) = 0$ , то  $f(I) = 0$  для любого гипокомпактного идеала  $I$  алгебры  $A$ . Следовательно,  $f(J) = 0$ , противоречие.  $\square$

Обозначим наибольший гипокомпактный идеал алгебры  $A$  через  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ .

**Лемма 3.11.** Если  $J$  — идеал в  $A$ , то  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J) = J \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ .

*Доказательство.* По следствию 3.9, идеал  $J \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$  алгебры  $J$  гипокомпактен, и потому содержится в  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J)$ . Требуется доказать обратное включение.

Пусть  $I = \text{span}_J (A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1)$ . Ясно, что  $I$  — идеал в  $A$ . Так как

$$\begin{aligned} \text{span}_J I^3 &\subset \text{span}_J ((A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1 A^1) \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) (A^1 A^1 \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) A^1)) \\ &\subset \text{span}_J (J \mathcal{R}_{\text{hc}}(J) J) \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(J), \end{aligned}$$

то  $\text{span}_J I^3$  — гипокомпактный идеал в  $J$ . Но алгебра  $I / (\text{span}_J I^3)$  бикомпактна, поскольку  $L_a R_b = 0$  для любых  $a, b \in I / (\text{span}_J I^3)$ . По следствию 3.9, идеал  $I$  гипокомпактен. Следовательно,  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(J) \subset I \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ .  $\square$

**Лемма 3.12.** Алгебра  $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$  не имеет ненулевых гипокомпактных идеалов и компактных элементов.

*Доказательство.* Если  $J$  — гипокомпактный идеал алгебры  $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ , то, по следствию 3.9, его прообраз  $\{x \in A : q_{\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)}(x) \in J\}$  — гипокомпактный идеал в  $A$ , строго содержащий  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ , противоречие.

По лемме 3.6, если  $A/\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$  имеет ненулевые компактные элементы, то у нее есть ненулевые бикомпактные идеалы, что невозможно.  $\square$

**Теорема 3.13.** *Отображение  $A \mapsto \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$  — наследственный топологический радикал.*

*Доказательство.* (R2) и (R5) доказаны в леммах 3.12 и 3.11; докажем (R1).

Пусть  $f : A \rightarrow B$  — непрерывный открытый эпиморфизм. Обозначим, для краткости,  $q_{\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)}$  через  $q$ . Ясно, что  $q \circ f$  — непрерывный открытый эпиморфизм  $A$  на  $B/\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$ . Так как идеал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$  гипокомпактен, то, по предложению 3.8, её образ  $(q \circ f)(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A))$  либо равен нулю, либо содержит ненулевой компактный элемент алгебры  $B/\mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$ . Но последнее невозможно в силу леммы 3.12. Значит,  $(q \circ f)(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)) = 0$  и  $f(\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)) \subset \mathcal{R}_{\text{hc}}(B)$ .  $\square$

Таким образом, *регулярный гипокомпактный радикал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$* , получаемый регулярной процедурой, — НТР. Очевидно, что  $\mathcal{R}_{\text{hc}} \leq \mathcal{R}_{\text{hc}}^r$ .

**3.3. Радикал  $\text{Rad}^r \wedge \mathcal{R}_{\text{hc}}$ .** Для дальнейшего важна связь между радикалами  $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r$  и  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ .

**Теорема 3.14.** *Радикал  $\text{Rad}^r \wedge \mathcal{R}_{\text{hc}}$  является наследственным, сопоставляет каждой алгебре  $A$  идеал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \cap \text{Rad}^r(A)$  и удовлетворяет неравенствам  $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r \leq \mathcal{R}_{\text{cq}} \leq \text{Rad}^r$ .*

*Доказательство.* Так как радикалы  $\mathcal{R}_{\text{hc}}$  и  $\text{Rad}^r$  наследственны, то  $\mathcal{R}_{\text{hc}} \wedge \text{Rad}^r$  — наследственный радикал и сопоставляет каждой алгебре  $A$  замкнутый идеал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A) \cap \text{Rad}^r(A)$  по лемме 3.2.

Докажем сначала, что каждая  $\text{Rad}^r$ -радикальная бикомпактная алгебра  $A$  компактно квазинильпотентна. В самом деле, если  $M \in \mathfrak{K}(A)$ , то  $r(M) = 0$ , поскольку  $A$  состоит из квазинильпотентных элементов. Пусть  $N = L_M R_M$ . Тогда  $r(N) = 0$  по лемме 2.1. Так как  $N$  — предкомпактное множество компактных операторов, то  $\rho(N) = 0$  по (1.3) и  $\rho(M) = 0$  по лемме 2.1.

Пусть  $A$  — произвольная алгебра и  $J = \text{Rad}^r(A) \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ . Так как идеал  $J$  гипокомпактен, то, по предложению 3.8, существует возрастающая трансфинитная цепочка  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  замкнутых идеалов в  $A$ , такая что  $J_0 = 0$ ,  $J_\gamma = J$ , и все факторы  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  бикомпактны. Из доказанного выше следует, что эти факторы  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ -радикальны. Тогда идеал  $J$  также  $\mathcal{R}_{\text{cq}}$ -радикален по лемме 3.1.

Из теоремы 3.3(d) вытекает, что замыкание компактно квазинильпотентного идеала алгебры в её пополнении состоит из квазинильпотентных элементов и, следовательно, лежит в радикале Джекобсона пополнения. Отсюда вытекает неравенство  $\mathcal{R}_{\text{cq}} \leq \text{Rad}^r$ .  $\square$

В частности, мы доказали, что на гипокомпактных алгебрах регулярный радикал Джекобсона совпадает с компактно квазинильпотентным радикалом.

#### 4. ОСНОВНЫЕ БВ-ФОРМУЛЫ

**4.1. Смешанная БВ-формула.** Здесь мы докажем, что

$$\rho(M) = \max\{\rho^x(M), r(M)\} \quad (4.1)$$

для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Это равенство достаточно установить, считая, что  $A$  — банахова алгебра и что  $M$  порождает  $A$ . В самом деле, все входящие в (4.1) величины не меняются при замене алгебры её пополнением. Кроме того,  $\rho(M)$  и  $r(M)$  не изменятся, если их вычислять в замкнутой подалгебре  $\mathcal{A}(M)$ , порожденной  $M$ . Значение же  $\rho^x(M) = \rho_x(L_M R_M)^{1/2}$  при этом не может возрасти, так как операторы  $L_M R_M$  сужаются на подпространство  $\mathcal{A}(M)$ , а нетривиальной частью (4.1) является лишь неравенство  $\leq$ .

Полугруппа  $G$  элементов алгебры  $A$  называется *полугруппой Раджави* (или, коротко, *R-полугруппой*), если  $\lambda a \in G$  для любых  $a \in G$  и  $\lambda \geq 0$ . Пусть  $M \subset A$ ,  $\mathcal{S}(M)$  — полугруппа, порожденная  $M$ , и  $\mathcal{S}_+(M)$  — R-полугруппа, порожденная  $M$ . Ясно, что  $\mathcal{S}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M^n$  и  $\mathcal{S}_+(M) = \mathbb{R}_+ \mathcal{S}(M)$ , где  $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ .

Пусть  $N$  — множество операторов в банаховом пространстве и  $G = \mathcal{S}(N)$ . Оператор  $T \in N^n$  называется *ведущим* (точнее, *n-ведущим*), если  $\|T\| \geq \|S\|$  для всех  $S \in \bigcup_{k < n} N^k$ . Уточнение термина существенно, так как оператор может быть в разных  $N^n$ . Далее, *ведущая последовательность* в  $G$  — это последовательность  $n(k)$ -ведущих операторов  $T_k \in N^{n(k)}$ , такая что  $n(k) \rightarrow \infty$  и  $\|T_k\| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Если  $G$  неограничена, то очевидно, что хотя бы одна ведущая последовательность в  $G$  существует.

**Лемма 4.1.** *Пусть  $N$  — предкомпактное множество операторов. Если верно  $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$  и полугруппа  $\mathcal{S}(N)$  неограничена, то существует последовательность операторов единичной нормы  $T_n \in \mathcal{S}_+(N)$ , сходящаяся к компактному оператору  $T$ . Более того, можно выбрать в качестве такой последовательности любую сходящуюся подпоследовательность из  $S_n/\|S_n\|$ , где  $\{S_n\}$  — произвольная ведущая последовательность в  $\mathcal{S}(N)$ .*

*Доказательство.* Последовательность  $\{S_n/\|S_n\|\}$  предкомпактна согласно [16, следствие 6.8(iii)]; пусть  $T$  — её предельная точка. В силу  $\rho_\chi(N) < 1$ , последовательность  $\{\|S_n\|_\chi\}$  ограничена и тогда последовательность хаудорфовых норм операторов  $S_n/\|S_n\|$  стремится к нулю. Следовательно,  $T$  компактен.  $\square$

**Лемма 4.2.** *Пусть  $A = \mathcal{A}(M)$ , где  $M$  предкомпактно, и пусть  $N = L_M R_M$ . Если  $\rho_\chi(N) < \rho(N) = 1$  и полугруппа  $\mathcal{S}(N)$  неограничена, то  $\mathcal{S}_+(N)$  содержит ненулевой компактный оператор  $T$ , такой что*

- (i) оператор  $L_{Th} R_{Tg}$  компактен при любых  $h, g \in A$ ;
- (ii) если  $r(N) < 1$ , то  $T(A) \subset \text{Rad}(A)$ .

*Доказательство.* Все элементы полугруппы  $\mathcal{S}_+(N)$  можно записывать в виде  $F = \lambda L_a R_b$ , где  $a, b \in \mathcal{S}(M)$  и  $\lambda \geq 0$ . Для краткости, мы полагаем  $F^{\rightleftharpoons} = \lambda L_b R_a$ . В выборе  $F^{\rightleftharpoons}$  может присутствовать неоднозначность, но независимо от этого выбора, для любых  $h, g \in M$  выполняется равенство  $L_{Fh} R_{Fg} = F L_h R_g F^{\rightleftharpoons}$ .

Пусть  $\{S_n\}$  — ведущая последовательность в  $\mathcal{S}(N)$ . Для каждого её элемента  $S_n \in N^{m(n)}$ , оператор  $S_n^{\rightleftharpoons}$  тоже можно выбрать в  $N^{m(n)}$ , поэтому мы можем дополнительно предполагать, что

$$\|S_n\| \geq \|S_n^{\rightleftharpoons}\| \quad (4.2)$$

для всех  $n$ . По лемме 4.1, есть последовательность операторов  $T_n = S_{k_n}/\|S_{k_n}\|$ , стремящаяся к компактному оператору  $T$ . Все операторы  $T_n^{\rightleftharpoons} = S_{k_n}^{\rightleftharpoons}/\|S_{k_n}\|$  являются сжимающими в силу (4.2). Отсюда последовательность  $\{L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons}\}$  ограничена для фиксированных  $h, g \in A$ . В силу этого

$$L_{Th} R_{Tg} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{T_n h} R_{T_n g} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons} = \lim_{n \rightarrow \infty} T L_h R_g T_n^{\rightleftharpoons}$$

и оператор  $L_{Th} R_{Tg}$ , как предел компактных операторов, компактен. Следовательно,  $T(A)$  состоит из совместно компактных элементов алгебры  $A$ .

Предположим, что  $r(N) < 1$ , и докажем, что при любых  $u, v, x \in \mathcal{S}(M)$  элемент  $u(Tx)v$  квазинильпотентен. По построению,  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} S_{k_n}$ , где

$$\lambda_{k_n} = \|S_{k_n}\|^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } S_{k_n} = L_{a_n} R_{b_n}$$

для некоторых  $a_n, b_n \in M^{m(n)}$  и  $m(n) \in \mathbb{N}$ . Тогда  $u a_n x b_n v \in \mathcal{S}(M)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  и последовательность элементов  $\lambda_{k_n} u a_n x b_n v$  стремится к компактному элементу  $u(Tx)v$  алгебры  $A$ . Из [1, теорема 4.4] следует, что спектр элемента

$u(Tx)v$  не более чем счётен, поэтому спектральный радиус непрерывен в  $u(Tx)v$  согласно [10]. Поскольку  $r(N) < 1$ , множество  $\{\rho(S) : S \in \mathcal{S}(N)\}$  ограничено и тогда, учитывая, что  $W_{ua_nxb_nv} \in \mathcal{S}(N)$ , получим

$$\rho(u(Tx)v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} \rho(ua_nxb_nv) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k_n} \rho(W_{ua_nxb_nv})^{1/2} = 0.$$

Таким образом, множество  $\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)$  при любом  $x \in \mathcal{S}(M)$  состоит из совместно компактных квазинильпотентных элементов алгебры  $A$ . Это же верно для его замыкания  $\overline{\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)}$ . Так как

$$Tx \in \overline{\mathcal{S}_+(N)\mathcal{S}(M)} = \overline{L_{\mathcal{S}_+(M)}R_{\mathcal{S}_+(M)}\mathcal{S}(M)} \subset \overline{\mathcal{S}_+(M)\mathcal{S}(M)\mathcal{S}_+(M)} \subset \overline{\mathcal{S}_+(M)},$$

то множество  $\overline{\mathcal{S}_+(M)(Tx)\mathcal{S}_+(M)}$  является полугруппой. По лемме 2.4, его замкнутая линейная оболочка  $J$  состоит из квазинильпотентных элементов. Так как  $A = \text{span } \mathcal{S}_+(M)$ , то  $J$  — идеал  $\overline{A(Tx)A}$  алгебры  $A$  и, таким образом,  $A(Tx)A \subset \text{Rad}(A)$ . В силу квазирегулярной характеристики радикала Джекобсона,  $A(Tx) \subset \text{Rad}(A)$  и, по той же причине,  $Tx \in \text{Rad}(A)$ . Учитывая, что  $A = \text{span } \mathcal{S}(M)$ , получим, что  $T(A) \subset \text{Rad}(A)$ .  $\square$

Бикомпактные идеалы, состоящие из квазинильпотентных элементов, мы будем называть *qb-идеалами*.

**Следствие 4.3.** Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Если  $\max\{\rho^\chi(M), r(M)\} < \rho(M) = 1$  и полугруппа  $\mathcal{S}(L_MR_M)$  неограничена, то  $\mathcal{A}(M)$  имеет ненулевой qb-идеал.

*Доказательство.* Пусть  $T$  — компактный оператор, построенный в лемме 4.2. Тогда любой ненулевой элемент  $Tx \in \mathcal{A}(M)$  порождает qb-идеал.  $\square$

**Лемма 4.4.** Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Если  $\mathcal{A}(M)$  не имеет ненулевых qb-идеалов, то равенство (4.1) справедливо.

*Доказательство.* Предположим, что (4.1) не выполнено. Мы можем считать, что  $\rho(M) = 1$ . Пусть  $N = L_MR_M$ , тогда  $\rho(N) = 1$  в силу леммы 2.1.

Если полугруппа  $\mathcal{S}(N)$  ограничена, то  $\max\{\rho_\chi(N), r(N)\} = 1$  согласно лемме 2.3. Если  $\rho_\chi(N) = 1$ , то  $\rho^\chi(M) = 1$ . Если же  $\rho_\chi(N) < 1$ , то  $r(N) = 1$  и  $r(M) = 1$  по лемме 2.1. В обоих случаях выполняется (4.1), что противоречит сделанному предположению. Таким образом,  $\mathcal{S}(N)$  неограничена. По следствию 4.3,  $\mathcal{A}(M)$  имеет ненулевой qb-идеал, что невозможно по условию леммы.  $\square$

**Теорема 4.5.** Формула  $\rho(M) = \max\{\rho^\chi(M), r(M)\}$  верна для любой нормированной алгебры  $A$  и любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .

*Доказательство.* Как мы уже отмечали, можно считать, что  $A = \mathcal{A}(M)$ . Пусть  $J = \text{Rad}(A) \cap \mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ . Так как, в силу теоремы 3.14,  $J \subset \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ , то  $\rho(M) = \rho(M/J)$  по теореме 3.3. Далее, алгебра  $A/J$  не имеет ненулевых qb-идеалов. Действительно, пусть  $I$  — какой-нибудь qb-идеал в  $A/J$ , тогда его прообраз  $U$  в  $A$  содержится в  $\text{Rad}(A)$  и  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(A)$ , поскольку радикалы устойчивы относительно расширений. Поэтому  $U \subset J$ , откуда  $I = 0$ .

Учитывая, что  $A/J = \mathcal{A}(M/J)$ , и применяя лемму 4.4, заключаем, что

$$\rho(M) = \rho(M/J) = \max\{\rho^\chi(M/J), r(M/J)\} \leq \max\{\rho^\chi(M), r(M)\}$$

в силу (2.5). Обратное неравенство очевидно.  $\square$

**4.2. Операторная БВ-формула.** Теперь мы можем доказать формулу (1.4).

**Теорема 4.6.** *Если множество  $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$  предкомпактно, то*

$$\rho(M) = \max\{\rho_e(M), r(M)\}.$$

*Доказательство.* По лемме 2.2,  $\|L_M R_M\|_{\chi} \leq 16\|M\|_{\chi}\|M\|$ . Заменяя  $M$  на  $M^n$ , извлекая корни  $n$ -й степени и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , придём к неравенству  $\rho^{\chi}(M)^2 = \rho_{\chi}(L_M R_M) \leq \rho_{\chi}(M)\rho(M)$ . Применяя теорему 4.5, получим  $\rho(M)^2 \leq \max\{\rho_{\chi}(M)\rho(M), r(M)^2\}$ , откуда, в силу  $r(M) \leq \rho(M)$ ,

$$\rho(M) \leq \max\{\rho_{\chi}(M), r(M)\} \leq \max\{\rho_e(M), r(M)\}$$

согласно (2.3). Обратное неравенство очевидно.  $\square$

**4.3. Алгебраическая БВ-формула.** Наша следующая цель — доказать, что

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}}^r(A)), r(M)\} \quad (4.3)$$

для любой нормированной алгебры  $A$  и для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Нам будет удобнее доказывать (4.3) в более гибкой форме:

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\} \quad (4.4)$$

для любого замкнутого гипокompактного идеала  $J$  алгебры  $A$ . Снова достаточно показать справедливость этой формулы для банаховых алгебр, поскольку, как было отмечено ранее, значения радиусов в (4.4) не меняются при пополнении алгебр и замыкании идеала в пополнении, в то же время как замыкание идеала гипокompактно.

Начнём со случая, когда идеал  $J$  алгебры  $A$  бикompактен.

**Лемма 4.7.** *Пусть  $J$  — замкнутый бикompактный идеал алгебры  $A$  и  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Тогда*

$$\rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/J)\rho(M). \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Пусть  $I = \text{span } J^2$ . Докажем сначала неравенство

$$\|L_M R_M\|_e \leq 3\|M/I\|\|M\|. \quad (4.6)$$

Пусть  $a, b \in M$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $u, v \in I$ , такие что  $\max\{\|a - u\|, \|b - v\|\} < \|M/I\| + \varepsilon$ . В частности,  $\|u\| < \|a\| + \|a - u\| \leq \|M\| + \|M/I\| + \varepsilon \leq 2\|M\| + \varepsilon$ . Так как  $J$  — бикompактный идеал в  $A$ , то  $I$  состоит из совместно компактных элементов алгебры  $A$ . Тогда оператор  $L_u R_v$  компактен в  $A$  и

$$\begin{aligned} \|L_a R_b\|_e &\leq \|L_a R_b - L_u R_v\| = \|L_{a-u} R_b + L_u R_{b-v}\| \leq \|a - u\| \|b\| + \|u\| \|b - v\| \\ &\leq (\|M/I\| + \varepsilon)\|M\| + (2\|M\| + \varepsilon)(\|M/I\| + \varepsilon) \\ &\leq (\|M/I\| + \varepsilon)(3\|M\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю и беря супремум по всем  $a, b \in M$ , получим (4.6).

Заменяя  $M$  в (4.6) на  $M^n$ , извлекая корни  $n$ -й степени и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим  $\rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/I)\rho(M)$ . Теперь, чтобы получить (4.5), заметим, что  $J/I$  — нильпотентный идеал в  $A/I$ , откуда  $J/I \in \mathcal{R}_{\text{cq}}(A/I)$  и  $\rho(M/J) = \rho(M/I)$  в силу теоремы 3.3.  $\square$

**Следствие 4.8.** *Равенство (4.4) выполнено для любого замкнутого бикompактного идеала  $J$  и любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .*

*Доказательство.* Так как  $\rho^{\chi}(M)^2 = \rho_{\chi}(L_M R_M) \leq \rho_e(L_M R_M) \leq \rho(M/J)\rho(M)$  согласно (4.5), то, применяя теорему 4.5 и неравенство  $r(M) \leq \rho(M)$ , получим

$$\rho(M)^2 = \max\{\rho^{\chi}(M)^2, r(M)^2\} \leq \max\{\rho(M/J)\rho(M), r(M)\rho(M)\},$$

что немедленно влечет равенство (4.4).  $\square$

**Лемма 4.9.** Пусть  $I \subset K$  — замкнутые идеалы алгебры  $A$  и  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Если алгебра  $K/I$  бикомпактна и равенство (4.4) выполнено при  $J = I$ , то оно выполнено и при  $J = K$ .

*Доказательство.* Изоморфизм  $A/K \rightarrow (A/I)/(K/I)$  обеспечивает равенство  $\rho(M/K) = \rho((M/I)/(K/I))$ , что, в свою очередь, даёт оценку

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \max\{\rho(M/I), r(M)\} = \max\{\max\{\rho((M/I)/(K/I)), r(M/I)\}, r(M)\} \\ &\leq \max\{\rho(M/K), r(M)\}. \end{aligned}$$

Обратное неравенство очевидно.  $\square$

**Лемма 4.10.** Если  $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$ , где  $(J_\alpha)$  — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры  $A$ , то для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$

$$\|M/J\| = \lim_\alpha \|M/J_\alpha\| = \inf_\alpha \|M/J_\alpha\|, \quad (4.7)$$

$$\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha). \quad (4.8)$$

*Доказательство.* Для любого  $\alpha$  выполняется неравенство  $\|M/J\| \leq \|M/J_\alpha\|$ , откуда  $\rho(M/J) = \inf_n \|M^n/J\|^{1/n} \leq \inf_\alpha \inf_n \|M^n/J_\alpha\|^{1/n} = \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha)$  и, кроме того,  $\|M/J\| \leq \inf_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \lim_\alpha \inf \|M/J_\alpha\|$ . С другой стороны, легко проверить, что для любых  $a \in M$  и  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\alpha = \alpha(a, \varepsilon)$ , что

$$\|a/J_\alpha\| \leq \|a/J\| + \varepsilon \leq \|M/J\| + \varepsilon. \quad (4.9)$$

Выберем в  $M$  конечную  $\varepsilon$ -сеть  $N$ ; так как для любого  $c \in A$  из  $\beta > \alpha$  следует неравенство  $\|c/J_\beta\| \leq \|c/J_\alpha\|$ , то, выбирая  $\gamma \geq \max\{\alpha(a, \varepsilon) : a \in N\}$ , получим, в силу (4.9), что  $\text{dist}(b/J_\gamma, N/J_\gamma) \leq \text{dist}(b, N) \leq \varepsilon$  для каждого  $b \in M$ , и потому  $\|M/J_\gamma\| \leq \|N/J_\gamma\| + \varepsilon \leq \|M/J\| + 2\varepsilon$ . Следовательно,

$$\inf_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|M/J_\alpha\| \leq \|M/J\|, \quad (4.10)$$

откуда вытекает (4.7). Выберем такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $\|M^n/J\|^{1/n} \leq \rho(M/J) + \varepsilon$ . Тогда, в силу неравенства (4.10), применённого к  $M^n$ , имеем

$$\begin{aligned} \inf_\alpha \rho(M/J_\alpha) &\leq \limsup_\alpha \rho(M/J_\alpha) \leq \limsup_\alpha \|M^n/J_\alpha\|^{1/n} \leq \|M^n/J\|^{1/n} \\ &\leq \rho(M/J) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает справедливость равенства (4.8).  $\square$

Теперь мы докажем формулу (4.4) и, тем самым, формулу (4.3).

**Теорема 4.11.** Формула  $\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r(M)\}$  справедлива для любого замкнутого гипокompактного идеала  $J$  и любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .

*Доказательство.* Найдётся возрастающая трансфинитная цепочка  $\{J_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}$  замкнутых идеалов в  $A$ , такая что  $J_0 = 0$ ,  $J_\beta = J$ , и все  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  бикомпактны. Если есть ординалы  $\alpha$ , для которых (4.4) при  $J = J_\alpha$  ложно, то пусть  $\gamma$  — наименьший из них. Он не является предельным в силу леммы 4.10, и не имеет предыдущего в силу леммы 4.9. Значит, (4.4) выполнено для всех  $\alpha$ .  $\square$

Из теоремы Вала [22] следует, что  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$  — бикомпактный идеал в  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ . Пусть  $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$  — идеал всех слабо компактных операторов в  $\mathcal{X}$ . Как известно (см. [4, следствие 6.8.13]), для широкого класса банаховых пространств  $\mathcal{X}$ , включающего все пространства  $L^1$  суммируемых функций, произведение двух операторов из  $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$  компактно, так что фактор-алгебра  $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$  имеет тривиальное умножение, а значит, бикомпактна. Поэтому для таких  $\mathcal{X}$  идеал  $\mathcal{K}_w(\mathcal{X})$  гипокompактен и потому содержится в  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ . Таким образом, идеал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$  может строго включать  $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ .

## 5. ДАЛЬНЕЙШЕЕ УСИЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БВ-ФОРМУЛЫ

**5.1. В поисках идеала.** Формулы типа (4.4) тем полезнее, чем больше входящий в них идеал  $J$ . При  $J = A$  такая формула означает, что в алгебре  $A$  величины  $\rho(M)$  и  $r(M)$  совпадают на  $\mathfrak{K}(A)$ , а при  $J = 0$  равенство (4.4) тривиально. Поэтому естественно ставить задачу об отыскании (или хотя бы о существовании) наибольшего идеала с таким свойством. Обозначим через  $BW(A)$  совокупность всех замкнутых идеалов  $J \subset A$ , для которых равенство (4.4) верно для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ ; такие идеалы будем называть *BW-идеалами*. Удобно выделить следующий результат, который легко доказывается.

**Лемма 5.1.** *Пусть  $I \subset J$  — замкнутые идеалы в  $A$ . Если  $J \in BW(A)$ , то  $I \in BW(A)$ .*

Следующий результат доказывается аналогично лемме 4.9.

**Лемма 5.2.** *Пусть  $I \subset J$  — замкнутые идеалы в  $A$ . Если  $I \in BW(A)$  и  $J/I \in BW(A/I)$ , то  $J \in BW(A)$ .*

**Лемма 5.3.** *Если  $J = \overline{\bigcup J_\alpha}$ , где  $(J_\alpha)$  — направленная по возрастанию сеть замкнутых идеалов алгебры  $A$ , и  $J_\alpha \in BW(A)$  для всех  $\alpha$ , то  $J \in BW(A)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Можно считать, что  $r(M) < \rho(M)$  (в противном случае равенство (4.4) очевидно). Следовательно, из  $J_\alpha \in BW(A)$  вытекает, что  $\rho(M/J_\alpha) = \rho(M)$  для всех  $\alpha$ . Применяя лемму 4.10, получим, что  $\rho(M/J) = \lim_\alpha \rho(M/J_\alpha) = \rho(M)$ .  $\square$

Применяя леммы 5.2 и 5.3, получаем по индукции следующий результат:

**Следствие 5.4.** *Если возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  алгебры  $A$  такова, что  $J_0 = 0$  и  $J_{\alpha+1}/J_\alpha \in BW(A/J_\alpha)$  для всех  $\alpha < \gamma$ , то  $J_\gamma \in BW(A)$ .*

По теореме 4.11, все замкнутые гипокompактные идеалы являются BW-идеалами. Докажем, что в  $BW(A)$  попадают также все замкнутые коммутативные идеалы. На деле, для них равенство (4.4) принимает более сильную форму. Напомним, что  $r_1(M)$  определяется (см. (1.2)) как  $\sup\{\rho(a) : a \in M\}$ .

**Лемма 5.5.** *Если  $J$  — замкнутый центральный идеал в  $A$  и  $M \in \mathfrak{K}(A)$ , то*

$$\rho(M) = \max\{\rho(M/J), r_1(L_M|J)\} = \max\{\rho(M/J), r_1(M)\}. \quad (5.1)$$

*Доказательство.* Семейство операторов  $L_M$  действует на нормированном пространстве  $A$  и оставляет инвариантным замкнутое подпространство  $J$ . По лемме 4.2 [16] (которую легко адаптировать к неполным пространствам),

$$\rho(L_M) = \max\{\rho(L_M|J), \rho(L_M|(A/J))\},$$

где  $L_M|J$  — сужение  $L_M$  на  $J$  и  $L_M|(A/J)$  — семейство, индуцированное в факторе  $A/J$ . Ясно, что  $L_M|(A/J) = L_{M/J}$ , и тогда  $\rho(L_M|(A/J)) = \rho(M/J)$ . На подпространстве  $J$  операторы умножения коммутируют:  $L_a L_b x = a b x = b a x = b a x = L_b L_a x$ . Тогда  $\rho(L_M|J) = r_1(L_M|J)$  по [17, лемма 2.8]. Остаётся учесть, что  $r_1(L_M|J) \leq r_1(L_M) = r_1(M)$  и  $\rho(M) = \rho(L_M)$ .  $\square$

Алгебра  $A$  называется *полупримарной*, если она не имеет нильпотентных идеалов. Эквивалентное условие: из равенства  $aAa = 0$  следует, что  $a = 0$ .

**Лемма 5.6.** *Если алгебра  $A$  полупримарна, то любой её коммутативный идеал  $J$  централен. Как следствие, среди всех её коммутативных идеалов есть наибольший.*

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in J$ ,  $a \in A$ , тогда  $x[a, y] = xa y - xya = yxa - yxa = 0$ . Взяв  $x = [a, y]b$ , где  $b \in A$ , получим  $[a, y]A[a, y] = 0$ , откуда  $[a, y] = 0$ . Это означает, что  $J$  централен.  $\square$

Будем говорить, что подмножество  $K \subset A$  коммутативно по модулю идеала  $J$ , если  $ab - ba \in J$  для любых  $a, b \in K$ .

**Теорема 5.7.** (i) Любая нормированная алгебра имеет наибольший идеал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ , коммутативный по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ .

(ii) Если замкнутый идеал  $J$  нормированной алгебры  $A$  коммутативен по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ , то равенство (5.1) выполнено для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$ .

*Доказательство.* Так как любой нильпотентный идеал компактно квазинильпотентен, то алгебра  $B = A/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  полупримарна. По лемме 5.6, она имеет наибольший коммутативный идеал  $I(B)$ ; его прообраз  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$  в  $A$  — наибольший идеал, коммутативный по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ .

Утверждение (ii) достаточно доказать для  $J = \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ . Используя центральность идеала  $I(B)$  и лемму 5.5, имеем

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \rho(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)) = \max\{\rho_{I(B)}(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)), r_1(M/\mathcal{R}_{\text{cq}}(A))\} \\ &= \max\{\rho(M/J), r_1(M)\}, \end{aligned}$$

где  $\rho_{I(B)}(N)$  обозначает  $\rho(N/I(B))$  для любого  $N \in \mathfrak{K}(B)$ .  $\square$

Для банаховых алгебр справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 5.8.** Для того, чтобы в банаховой алгебре  $A$  выполнялось условие:

$$\rho(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M\} \text{ для всех } M \in \mathfrak{K}(A), \quad (5.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы она была коммутативной по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ .

*Доказательство.* Достаточность следует из теоремы 5.7.

Пусть выполнено (5.2). Для любых  $a, b \in A$ , положим  $(\text{ad } b)a = [a, b]$ , тогда при любом  $\lambda \neq 0$  отображение  $\exp(\lambda(\text{ad } b))$  является автоморфизмом алгебры  $A$ , и потому  $\rho(\exp(\lambda(\text{ad } b))a) = \rho(a)$ . Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Из формулы (5.2), применённой к множеству  $N = M \cup \{\lambda^{-1}a, \lambda^{-1}\exp(\lambda(\text{ad } b))a\}$ , получаем, что

$$\rho(N) = \max\{\rho(a)/|\lambda|, r_1(M)\}.$$

Обозначим правую часть равенства через  $C(\lambda)$ . Так как  $\frac{1}{2}(\exp(\lambda(\text{ad } b))a - a)/\lambda$  принадлежит абсолютно выпуклой оболочке  $\text{abs}(N)$  множества  $N$  и  $\rho(\text{abs}(N)) = \rho(N)$  (см. [16, предложение 2.6]), получим, что

$$\rho(\{((\exp(\lambda(\text{ad } b))a - a)/\lambda)/2\} \cup M) \leq C(\lambda).$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  верхний предел функции  $f(\lambda) = \rho(\{(\frac{1}{2}(\exp(\lambda(\text{ad } b))a - a)/\lambda\} \cup M)$  не превосходит числа  $r_1(M)$ . Будучи субгармонической (см. [16, теорема 3.5]), эта функция постоянна и везде не превосходит  $r_1(M)$ . В частности,

$$f(0) = \rho(\{[a, b]/2\} \cup M) \leq r_1(M) \leq \rho(M).$$

Так как  $M$  произвольно, это означает, что  $[a, b] \in \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  (см. теорему 3.3(b)). Следовательно,  $A$  коммутативна по модулю идеала  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ .  $\square$

Таким образом,  $BW(A)$  содержит все замкнутые идеалы, которые получаются из бикомпактных, коммутативных и компактно квазинильпотентных с помощью последовательного применения операции расширения.

По лемме 5.3, всякая цепочка  $BW$ -идеалов имеет мажоранту, являющуюся  $BW$ -идеалом. Следовательно, по лемме Цорна, в любой нормированной алгебре  $A$  есть максимальные  $BW$ -идеалы, и фактор-алгебра по любому из этих идеалов не имеет  $BW$ -идеалов по лемме 5.2. Неизвестно, однако, существует ли



наибольший  $BW$ -идеал. Эквивалентный вопрос: является ли замыкание суммы  $BW$ -идеалов  $BW$ -идеалом? Мы увидим, что ответы на эти вопросы станут утвердительными, если вместо идеалов рассматривать радикалы.

**5.2. От идеалов к радикалам.** Скажем, что ТР  $P$  является  $BW$ -радикалом, если все замкнутые  $P$ -радикальные идеалы являются  $BW$ -идеалами.

**Теорема 5.9.** *Существует наибольший  $BW$ -радикал  $\mathcal{R}_{bw}$ ; всякий топологический радикал, не превосходящий  $\mathcal{R}_{bw}$ , является  $BW$ -радикалом.*

*Доказательство.* Обозначим через  $\mathcal{R}_{bw}$  точную верхнюю грань семейства всех  $BW$ -радикалов (см. лемму 3.2); требуется доказать, что  $\mathcal{R}_{bw}(A)$  является  $BW$ -идеалом для любой нормированной алгебры  $A$ .

По лемме 3.2, существует возрастающая трансфинитная цепочка замкнутых идеалов  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ , такая что  $J_1 = 0$ ,  $J_\gamma = \mathcal{R}_{bw}(A)$  и каждый фактор  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  является  $P$ -радикальным для некоторого  $BW$ -радикала  $P$ . Значит,  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  является  $BW$ -идеалом в  $A/J_\alpha$ . По следствию 5.4,  $\mathcal{R}_{bw}(A)$  —  $BW$ -идеал.

Если  $P$  — ТР и  $P \leq \mathcal{R}_{bw}$ , то  $P$  —  $BW$ -радикал в силу леммы 5.1.  $\square$

Согласно теореме,  $\rho(M) = \max\{\rho(M/\mathcal{R}_{bw}(A)), r(M)\}$  для любого  $M \in \mathfrak{K}(A)$  и любой алгебры  $A$ . В частности, справедлив следующий результат.

**Следствие 5.10.**  $\mathcal{R}_{bw}(A) \cap \text{Rad}^r(A) \subset \mathcal{R}_{cq}(A)$  для любой алгебры  $A$ .

В силу (4.3), регулярный гипокомпактный радикал  $\mathcal{R}_{hc}^r$  —  $BW$ -радикал. Покажем, что отображение  $A \mapsto \mathcal{R}_{cq}^a(A)$  — также  $BW$ -радикал.

**Лемма 5.11.**  $\mathcal{R}_{cq}^a(A) = \{x \in A : x[a, b] \in \mathcal{R}_{cq}(A) \text{ для всех } a, b \in A\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $P(A)$  — правая часть доказываемого равенства. Легко видеть, что  $P(A)$  — идеал в  $A$ . Если  $x \in P(A)$ ,  $a, b \in A$ , то  $[x, a]b[x, a] \in \mathcal{R}_{cq}(A)$  (поскольку  $[x, a]b \in P(A)$ ), то есть, образ элемента  $[x, a]$  в  $A/\mathcal{R}_{cq}(A)$  порождает нильпотентный идеал. Так как  $A/\mathcal{R}_{cq}(A)$  полупримерна, то этот образ равен нулю и тогда  $x$  централен по модулю  $\mathcal{R}_{cq}(A)$ . Следовательно,  $P(A) \subset \mathcal{R}_{cq}^a(A)$ .

Обратно, пусть  $x \in \mathcal{R}_{cq}^a(A)$ . Так как  $x$  централен по модулю  $\mathcal{R}_{cq}(A)$ , то  $x[a, b] = [xa, b] - [x, b]a \in \mathcal{R}_{cq}(A)$  для любых  $a, b \in A$ , откуда  $\mathcal{R}_{cq}^a(A) \subset P(A)$ .  $\square$

Из этой леммы и теоремы 3.3(d) сразу вытекает утверждение:

**Следствие 5.12.**  $\mathcal{R}_{cq}^a(B) = B \cap \mathcal{R}_{cq}^a(A)$  для любой плотной подалгебры  $B$  нормированной алгебры  $A$ .

**Теорема 5.13.** *Отображение  $A \mapsto \mathcal{R}_{cq}^a(A)$  — наследственный топологический радикал.*

*Доказательство.* Мы должны проверить условия (R1), (R2) и (R5) для  $\mathcal{R}_{cq}^a$ , причём достаточно это сделать для банаховых алгебр. В самом деле, если показать, что  $\mathcal{R}_{cq}^a$  — НТР в классе банаховых алгебр, то регулярное расширение  $\mathcal{R}_{cq}^{ar}$  — НТР в силу [18, теорема 2.21]. Но  $\mathcal{R}_{cq}^a = \mathcal{R}_{cq}^{ar}$  по следствию 5.12.

Если  $f : A \rightarrow B$  — непрерывный эпиморфизм банаховых алгебр, то, полагая  $J = f(\mathcal{R}_{cq}^a(A))$ , получим  $[J, J] \subset f([\mathcal{R}_{cq}^a(A), \mathcal{R}_{cq}^a(A)]) \subset f(\mathcal{R}_{cq}(A)) \subset \mathcal{R}_{cq}(B)$ , то есть, идеал  $J$  коммутативен по модулю  $\mathcal{R}_{cq}(B)$ . Значит,  $f(\mathcal{R}_{cq}^a(A)) \subset \mathcal{R}_{cq}^a(B)$ , то есть, выполнено условие (R1).

Пусть  $I = \mathcal{R}_{cq}^a(A)$ ,  $B = A/I$ ,  $K = \{x \in A : q_I(x) \in \mathcal{R}_{cq}^a(B)\}$ ; требуется доказать, что  $K \subset I$ . Ясно, что (5.1) справедливо при  $J = I$  и выполнено в алгебре  $B$  при  $J = K/I$ . Рассуждая как в лемме 5.2 (то есть, как в лемме 4.9), получим, что оно выполнено при  $J = K$ , откуда  $\rho(M) = r_1(M)$  при  $M \in \mathfrak{K}(K)$ . По теореме 5.8, идеал  $K$  коммутативен по модулю  $\mathcal{R}_{cq}(K) = K \cap \mathcal{R}_{cq}(A)$ , а значит, и по модулю  $\mathcal{R}_{cq}(A)$ , то есть,  $K \subset \mathcal{R}_{cq}^a(A) = I$ . Условие (R2) доказано.

Пусть  $I$  — замкнутый идеал банаховой алгебры  $A$ . Из леммы 5.11 следует, что  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$  инвариантен относительно непрерывных автоморфизмов алгебры  $I$ , а потому и относительно её ограниченных дифференцирований (поскольку они — генераторы групп автоморфизмов). Следовательно, если  $x \in \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ ,  $a \in A$ , то  $[a, x] \in \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ . С другой стороны, из леммы 5.11 (и того, что  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(I)$  — идеал в  $A$ ) следует, что  $ax[v, w] \in \mathcal{R}_{\text{cq}}(I)$  для любых  $v, w \in I$ , поэтому  $ax \in \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ . Отсюда  $xa \in \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ . Мы доказали, что  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$  — идеал в  $A$ .

Так как  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(I) \subset \mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$  и идеал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$  коммутативен по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(I)$ , то он коммутативен и по модулю  $\mathcal{R}_{\text{cq}}(A)$ , а значит, содержится в  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ . Таким образом,  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I) \subset I \cap \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ . С другой стороны, если  $x \in I \cap \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A)$ , то для любых  $a, b \in I$ , по лемме 5.11,  $x[a, b] \in I \cap \mathcal{R}_{\text{cq}}(A) = \mathcal{R}_{\text{cq}}(I)$  и, следовательно,  $x \in \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ . Это доказывает включение  $I \cap \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(A) \subset \mathcal{R}_{\text{cq}}^a(I)$ . (R5) доказано.  $\square$

**Следствие 5.14.** *Радикал  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$  равномерен и является BW-радикалом.*

*Доказательство.* Для равномерности достаточно показать в силу следствия 5.12, что любая замкнутая подалгебра  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ -радикальной банаховой алгебры  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ -радикальна. Но это очевидно в силу теоремы 5.8.

Далее,  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$  является BW-радикалом согласно теоремам 5.7 и 5.13.  $\square$

Обозначим радикал  $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r \vee \mathcal{R}_{\text{cq}}^a$  через  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ . Ясно, что он отличен от  $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$  и  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ , и что  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a} \leq \mathcal{R}_{\text{bw}}$ . Следующий результат вытекает из теоремы 5.9.

**Следствие 5.15.** *Радикал  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$  является BW-радикалом.*

**Следствие 5.16.** *Замыкание  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальной подалгебры  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикально.*

*Доказательство.* Заметим, что доказываемым свойством обладают радикалы  $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$  и  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ . Поэтому из леммы 3.2 следует, что замыкание  $B$  произвольной  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальной подалгебры обладает цепочкой замкнутых идеалов  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$ , таких что  $J_0 = 0$ ,  $J_\gamma = B$  и каждый фактор  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  либо  $\mathcal{R}_{\text{hc}}^r$ -радикален, либо  $\mathcal{R}_{\text{cq}}^a$ -радикален, а значит,  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикален. Тогда алгебра  $B$   $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}$ -радикальна по лемме 3.1.  $\square$

## 6. Роль БВ-ФОРМУЛ В ВОПРОСЕ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ССР

В [16, предложение 3.1] было показано, что ССР — полунепрерывная сверху функция ограниченного подмножества нормированной алгебры. Это означает, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \leq \rho(M)$ , если последовательность ограниченных подмножеств  $M_n$  стремится к  $M$  в смысле расстояния Хаусдорфа. Скажем, что ССР непрерывен в  $M \subset A$ , если  $\rho(M_n) \rightarrow \rho(M)$ , когда  $M_n$  стремится к  $M$ .

Следующее утверждение очевидно.

**Лемма 6.1.** *Пусть  $M \subset A$  ограничено и  $J$  — замкнутый идеал в  $A$ . Если  $\rho(M) = \rho(M/J)$  и ССР непрерывен в  $M/J$ , то ССР непрерывен в  $M$ .*

Хорошо известно, что оператор  $T$  — точка непрерывности спектрального радиуса (в обычном смысле), если  $\rho_\epsilon(T) < \rho(T)$ , а также что спектральный радиус непрерывен на коммутативных нормированных алгебрах. Мы получим сейчас аналогичные результаты для ССР.

**Лемма 6.2.** *Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . ССР непрерывен в  $M$ , если выполнено хотя бы одно из условий:*

- (i)  $A = \mathcal{B}(\mathcal{X})$  и  $\rho_{\mathcal{X}}(M) < \rho(M)$ ;
- (ii) существует замкнутый центральный идеал  $J$  алгебры  $A$ , такой что  $\rho(M/J) < \rho(M)$ .

*Доказательство.* Пусть  $M_n \rightarrow M$ . Покажем, что  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \geq \rho(M)$ .

(i) Допустим противное. Умножая на константу и заменяя последовательность  $\{M_n\}$  её подпоследовательностью, мы можем считать, что  $\rho_\chi(M) < 1$  и  $\lim \rho(M_n) < 1 < \rho(M)$ . По теореме 4.6,  $\rho(M) = r(M)$ . Следовательно,  $\sup\{\rho(T) : T \in M^k\} > 1$  при некотором  $k$ , и найдется  $T \in M^k$ , такой что  $\rho(T) > 1$ . Так как  $\rho_\chi(M) < 1$ , то  $\|M^n\|_\chi < 1$  при достаточно больших  $n$  и тогда  $\|T^n\|_\chi \leq \|M^{nk}\|_\chi < 1$ , откуда  $\rho_\chi(T) \leq 1$ . Поскольку  $\rho_\chi(T) = \rho_e(T)$  (см. [7, следствие 6.4]), получим, что  $\rho_e(T) < \rho(T)$ . По условию, найдутся такие  $T_n \in M_n^k$ , что  $T_n \rightarrow T$  и, следовательно,  $\rho(T_n) \rightarrow \rho(T)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Но это невозможно, поскольку  $\rho(T_n) \leq \rho(M_n^k) = \rho(M_n)^k$  и  $\lim_n \rho(M_n)^k < 1$ .

(ii) Согласно (5.1),  $\rho(M) = r_1(L_M|J)$ . Так как операторы левого умножения, суженные на  $J$ , образуют коммутативную алгебру и  $L_{M_n}|J$  стремится к  $L_M|J$ , то из [17, лемма 2.7] вытекает, что  $r_1(L_{M_n}|J) \rightarrow r_1(L_M|J)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\rho(M_n) \geq r_1(L_{M_n}|J)$  для любого  $n$ , получим  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n) \geq \rho(M)$ .  $\square$

**Теорема 6.3.** Пусть  $M \in \mathfrak{K}(A)$ . Если  $\rho(M/\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)) < \rho(M)$ , то ССР непрерывен в  $M$  и  $\rho(M) = \sup\{\rho(K) : K \subset M \text{ конечно}\}$ .

*Доказательство.* По следствию 5.16, можно считать, что  $A$  — банахова алгебра. Согласно лемме 3.2, найдётся цепочка  $(J_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$  замкнутых идеалов, такая что  $J_0 = 0$ ,  $J_\gamma = \mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$  и все факторы  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  либо гипокompактны, либо центральны по модулю компактно квазинильпотентного радикала. Расширяя, если необходимо, цепочку за счёт цепочек, соответствующих этим факторам, мы можем считать, что все  $J_{\alpha+1}/J_\alpha$  либо центральны, либо компактно квазинильпотентны, либо бикompактны (по предложению 3.8).

Найдем первый ординал  $\beta$ , для которого  $\rho(M/J_\beta) < \rho(M)$ . Тогда  $\beta$  не может быть предельным по лемме 4.10. Иными словами, существует ординал  $\alpha$ , что  $\rho(M) = \rho(M/J_\alpha) > \rho(M/J_{\alpha+1})$ . Пусть  $M' = M/J_\alpha$  и  $J = J_{\alpha+1}/J_\alpha$ . Тогда  $J$  не является компактно квазинильпотентным по теореме 3.3. Если  $J$  централен, то ССР непрерывен в  $M'$  по лемме 6.2 и потому — в  $M$  по лемме 6.1.

Остаётся рассмотреть случай, когда  $J$  бикompактен. Пусть  $N = L_{M'}R_{M'}$ . Тогда  $N$  — предкомпактное множество операторов. Так как

$$\rho_\chi(N) \leq \rho_e(N) \leq \rho(M'/J)\rho(M') < \rho(M')^2 = \rho(N)$$

в силу лемм 4.7 и 2.1, то ССР непрерывен в  $N$  по лемме 6.2. Пусть теперь последовательность ограниченных множеств  $M_n$  стремится к  $M$ . Положим  $N_n = L_{M_n/J_\alpha}R_{M_n/J_\alpha}$ . Тогда  $N_n$  стремится к  $N$  и

$$\rho(M_n)^2 \geq \rho(M_n/J_\alpha)^2 = \rho(N_n) \rightarrow \rho(N) = \rho(M)^2.$$

Следовательно,  $\liminf \rho(M_n) \geq \rho(M)$  и ССР непрерывен в  $M$ . В качестве  $\{M_n\}$  можно взять последовательность конечных подмножеств, стремящуюся к  $M$ . Поэтому  $\rho(M) = \sup \rho(K)$ , где  $K$  пробегает конечные подмножества в  $M$ .  $\square$

**Следствие 6.4.** Если  $G$  — полугруппа квазинильпотентных элементов нормированной алгебры  $A$  и  $G \subset \mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$ , то алгебра  $\text{span } G$  компактно квазинильпотентна.

*Доказательство.* Для каждого конечного подмножества  $N$  линейной оболочки полугруппы найдётся конечное подмножество  $M \subset G$ , такое что  $N \subset \text{abs}(M)$ . Так как  $\rho(\text{abs}(M)) = \rho(M) = r(M) = 0$ , то  $\rho(N) = 0$ . Поскольку  $\text{span } G$  лежит в  $\mathcal{R}_{\text{hc}^r + \text{cq}^a}(A)$ , ССР непрерывен в  $M$  для любого  $M \in \mathfrak{K}(\text{span } G)$  согласно теореме 6.3, откуда ясно, что алгебра  $\text{span } G$  компактно квазинильпотентна.  $\square$

Нам неизвестно, непрерывен ли ССР в  $M \in \mathfrak{K}(A)$ , если выполнено неравенство  $\rho(M/\mathcal{R}_{\text{bw}}(A)) < \rho(M)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. C. Alexander, *Compact Banach algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **18** (1968) 1-18.
- [2] M. A. Berger, Y. Wang, *Bounded semigroups of matrices*, Linear algebra Appl. **166** (1992), 21-27.
- [3] P. S. Guinand, *On quasinilpotent semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 485-486.
- [4] Н. Данфорд и Дж. Шварц, *Линейные операторы*, том 1, ИЛ, Москва, 1962.
- [5] P. G. Dixon, *Topologically irreducible representations and radicals in Banach algebras*, Proc. London Math. Soc., (3) **74** (1997), 174-200.
- [6] R. Jungers, *Joint spectral radius, theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [7] A. Lebow, M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness*, J. Funct. Anal. **7** (1971) 1-26.
- [8] В. И. Ломоносов, *Инвариантные подпространства для операторов, коммутирующих с компактными операторами*, Функц. анализ и прилож., **7** (1973) 213-214.
- [9] I. D. Morris, *The generalized Berger-Wang formula and the spectral radius of linear cocycles*, preprint: arXiv:0906.2915v1 [math.DS] 16 Jun 2009.
- [10] J. D. Newburgh, *The variation of spectra*, Duke Math. J. **18** (1951) 165-176.
- [11] J. R. Peters, R. W. Wogen, *Commutative radical operator алгебры*, J. Operator Theory **42** (1999), 405-424.
- [12] G.-C. Rota, W. G. Strang, *A note on the joint spectral radius*, Indag. Math. **22** (1960), 379-381.
- [13] Ю. В. Туровский, *Спектральные свойства некоторых подалгебр Ли и спектральный радиус подмножеств в банаховых алгебрах*, Спектральная теория операторов и её приложения, **6** (1985), "ЭЛМ Баку, 144-181.
- [14] Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, *Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые проблемы теории радикальных банаховых алгебр*, Функц. анализ и прилож., **35** (2001), № 4, 88-91.
- [15] В. С. Шульман, *Об инвариантных подпространствах вольтерровых операторов*, Функц. анализ и прилож., **18** (1984), №2, 84-85.
- [16] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Joint spectral radius, operator semigroups and a problem of W. Wojtyński*, J. Funct. Anal. **177** (2000), 383-441.
- [17] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Formulae for joint spectral radii of sets of operators*, Studia Math. **149** (2002), 23-37.
- [18] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Topological radicals, I. Basic properties, tensor products and joint quasinilpotence*, Topological algebras, their applications and related topics, Banach Center publications, volume **67**, pages 293-333, Warszawa 2005.
- [19] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Application of topological radicals to calculation of joint spectral radii*, preprint: arXiv:0805.0209 [math.FA] 2 May 2008.
- [20] V. S. Shulman, Yu. V. Turovskii, *Topological radicals, II. Applications to the spectral theory of multiplication operators*, Operator Theory: Advances and Applications, volume **212** (2010), 45-114.
- [21] Yu. V. Turovskii, *Volterra semigroups have invariant subspaces*, J. Funct. Anal. **162** (2) (1999), 313-323.
- [22] K. Vala, *On compact sets of compact operators*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **351** (1964) 1-8.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА  
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ1141, АЗЕРБАЙДЖАН  
Эл.адрес: yuri.turovskii@gmail.com

ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ул. Ленина, 15, Вологда 160000, Россия  
Эл.адрес: shulman.victor80@gmail.com